ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère des Universités
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
Tél. : 551 32-59

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1981

MATHEMATIQUES 1ère EPREUVE

DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

PROBLEME 1

N.B. - Les parties B et C, sauf une partie de B.2 sont indépendantes de A.
Les questions C.1 et C.2 peuvent être traitées sans qu'une base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ ait été trouvée en B.3.

Partie A Soit f une fonction continue sur $[-1, +1]$ et telle que, pour tout x élément de $[-1, +1]$, $f(x) \geqslant 0$.

On sait alors que $\int_{-1}^{1} f(x) \, . \, dx \geqslant 0$.

On suppose, en outre, qu'il existe un nombre x_0 de l'intervalle $[-1, +1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$, c'est-à-dire que f n'est pas la fonction nulle sur $[-1, +1]$.

A.1 Montrer, en utilisant la définition de la continuité d'une fonction, qu'il existe au moins un intervalle $[a, b]$ inclus dans $[-1, +1]$ avec $a \neq b$ et tel que :

$$\forall x \in [a, b] \ , \ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{f(x_0)}{2}$$

A.2 En déduire que, pour tout x appartenant à cet intervalle $[a, b]$, on a $f(x) \geqslant \frac{1}{2} f(x_0)$ puis que $\int_a^b f(x) \, . \, dx > 0$

A.3 Montrer alors que $\int_{-1}^{1} f(x) \, dx > 0$

Partie B Soit E l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels, définies sur $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 2.

B.1 Montrer brièvement que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de E ?

B.2 Montrer que l'application de E x E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(f, g) \longmapsto \int_{-1}^{1} f(x) \, g(x) \, dx$$

est un produit scalaire sur E.

(On pourra utiliser la partie A pour démontrer l'une des propriétés du produit scalaire).

On posera :

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, g(x) \, dx = \langle f, g \rangle \quad \text{et} \quad \sqrt{\langle f, f \rangle} = \| f \| .$$

B.3 Vérifier que les fonctions polynômes P_0 et P_1 définies, pour tout x réel, par $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$, sont orthogonales pour ce produit scalaire, c'est-à-dire que $< P_0 , P_1 > = 0$.

Déterminer une fonction polynôme P_2 de degré 2 orthogonale à la fois à P_0 et P_1 .

Calculer $\| P_0 \|$, $\| P_1 \|$, $\| P_2 \|$.

En déduire une base orthonormée $(\varphi_0 , \varphi_1 , \varphi_2)$ de E.

Partie C Pour toute fonction polynôme P, élément de E, c'est-à-dire à coefficients réels, définies sur $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 2, on pose :

$$I(P) = \int_{-1}^{1} [e^x - P(x)]^2 \, dx$$

On se propose de déterminer une polynôme P_m de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$(1) \qquad \forall P \in E , \; I(P_m) \leq I(P)$$

et de calculer $I(P_m)$.

Pour cela, on pose $P = \alpha_0 \; \varphi_0 + \alpha_1 \; \varphi_1 + \alpha_2 \; \varphi_2$ où $(\varphi_0 , \varphi_1 , \varphi_2)$ désigne la base orthonormée trouvée en B.3 et α_0 , α_1 , α_2 trois nombres réels.

C.1 Déterminer, sans calcul, $\int_{-1}^{1} [P(x)]^2 \, dx$ en fonction de α_0 , α_1 et α_2 .

C.2 On suppose connues les intégrales :

$$a_i = \int_{-1}^{1} e^x \, \varphi_i(x) \, dx \quad \text{pour} \quad i \in \{0, 1, 2\} .$$

Démontrer que :

$$I(P) = \int_{-1}^{1} e^{2x} \, dx + (\alpha_0 - a_0)^2 + (\alpha_1 - a_1)^2 + (\alpha_2 - a_2)^2 - a_0^2 - a_1^2 - a_2^2$$

Comment faut-il choisir $\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2$ pour que I(P) soit le plus petit possible ?

En déduire qu'il existe un polynôme P_m de E, et un seul, satisfaisant (1).

C.3 Calculer $\int_{-1}^{1} e^x \, dx$, $\int_{-1}^{1} x \, e^x \, dx$, $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1) \, e^x \, dx$.

En déduire :

(a) a_0 , a_1 , a_2 .

(b) $I(P_m)$

(c) L'expression explicite de $P_m(x)$ sous la forme :

$$a + bx + cx^2$$

avec a, b, c réels.

PROBLEME 2

Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par l'égalité :

$$f(x) = (ax + b)\, e^{2x} + (cx + d)\, e^{-2x}$$

où a, b, c et d sont des réels.

1. On pose $f(x) = (ax + b)\, e^{2x} + (cx + d)\, e^{-2x}$. Calculer les nombres $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

2. Démontrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que les applications f_1 , f_2 , f_3 , f_4 définies par les égalités :

$$f_1(x) = x\, e^{2x} \; ; \; f_2(x) = e^{2x} \; ; \; f_3(x) = x\, e^{-2x} \; ; \; f_4(x) = e^{-2x}$$

forment une base de l'espace vectoriel E.

4. Soit P l'ensemble des applications paires de E, soit I l'ensemble des applications impaires de E.

a) Déterminer les ensembles P et I.

b) Démontrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E.

c) Démontrer que les applications h_1 et h_2 définies par les égalités :

$$h_1(x) = x\, e^{2x} - x\, e^{-2x} \qquad \text{et} \qquad h_2(x) = e^{2x} + e^{-2x}$$

forment une base de l'espace vectoriel P, et que les applications h_3 et h_4 définies par les égalités :

$$h_3(x) = x\, e^{2x} + x\, e^{-2x} \qquad \text{et} \qquad h_4(x) = e^{2x} - e^{-2x}$$

forment une base de l'espace vectoriel I.

5. Soit désormais E_1 l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par l'égalité :

$$f(x) = (ax + b)\, e^{2x}$$

où a et b sont des réels.

a) Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Montrer que les applications f_1 et f_2 forment une base de l'espace vectoriel E_1.

b) Soit g l'application définie par l'égalité :

$$\forall f \in E_1 \; , \; g(f) = f'.$$

(α) Démontrer que g est un endomorphisme de E_1

(β) Déterminer la matrice de g dans la base $\{f_1 , f_2\}$; en déduire que g est un automorphisme de E_1.

(γ) Soit g^{-1} l'application réciproque de g; vérifier que si on pose $\varphi = g^{-1}(f)$, alors l'application φ est une primitive de f; déterminer la matrice de g^{-1} dans la base $\{f_1 , f_2\}$.

(δ) On pose $f(x) = (-2x + 1)\, e^{2x}$, calculer :

$$\int_0^2 (-2x + 1)\, e^{2x} \, . \, dx.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail